

2025年普通高等学校招生全国统一考试（天津卷）

数学

一、选择题：在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的。

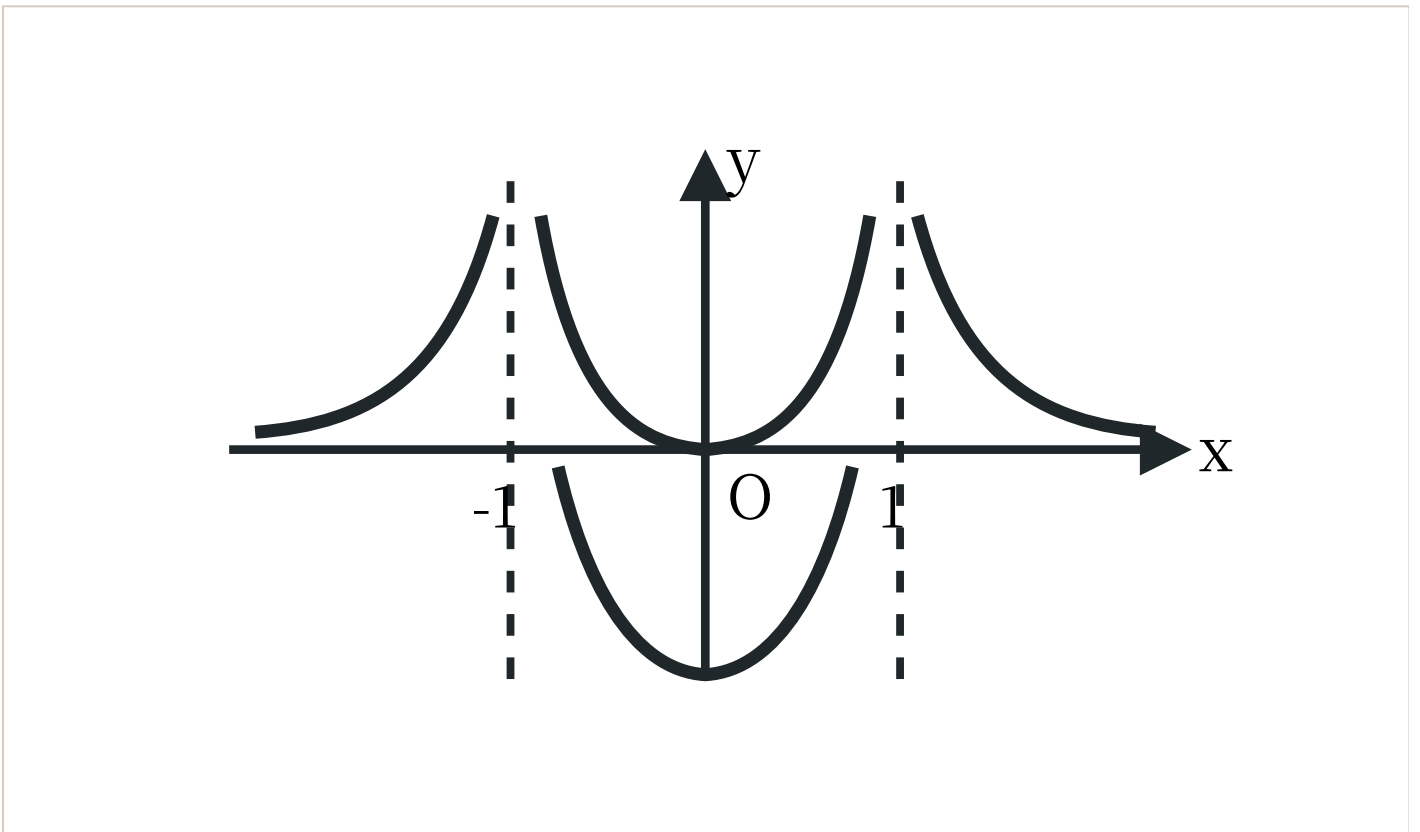
1. 已知全集 $U = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ ，集合 $A = \{1, 3\}$ ， $B = \{2, 3, 5\}$ ，则 $C_U(A \cup B) = ()$

- A. $\{1, 3\}$
- B. $\{2, 3, 5\}$
- C. $\{2, 4\}$
- D. $\{4\}$

2. 设 $x \in \mathbb{R}$ ，则“ $x = 0$ ”是“ $\sin 2x = 0$ ”的 $()$

- A. 充分不必要条件
- B. 必要而不充分条件
- C. 充要条件
- D. 既不充分也不必要条件

3. 已知函数 $y = f(x)$ 的图象如下，则 $f(x)$ 的解析式可能为 $()$



- A. $f(x) = x/(1-|x|)$
- B. $f(x) = x/(|x|-1)$
- C. $f(x) = |x|/(1-x^2)$
- D. $f(x) = |x|/(x^2-1)$

4. 若 m 为直线， α, β 为两个平面，则下列结论中正确的是 $()$

- A. 若 $m \parallel \alpha$ ， $n \subseteq \alpha$ ，则 $m \parallel n$
- B. 若 $m \perp \alpha$ ， $m \perp \beta$ ，则 $\alpha \perp \beta$
- C. 若 $m \parallel \alpha$ ， $m \perp \beta$ ，则 $\alpha \perp \beta$
- D. 若 $m \subseteq \alpha$ ， $\alpha \perp \beta$ ，则 $m \perp \beta$

5. 下列说法中错误的是 $()$

- A. 若 $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ ，则 $P(X \leq \mu - \sigma) = P(X \geq \mu + \sigma)$

B. 若 $X \sim N(1, 2^2)$, $Y \sim N(2, 2^2)$, 则 $P(X < 1) < P(Y < 2)$

C. $|r|$ 越接近 1, 相关性越强

D. $|r|$ 越接近 0, 相关性越弱

6. $S_n = -n^2 + 8n$, 则数列 $\{|a_n|\}$ 的前 12 项和为 ()

A. 112

B. 48

C. 80

D. 64

7. 函数 $f(x) = 0.3^x - \sqrt{x}$ 的零点所在区间是 ()

A. (0, 0.3)

B. (0.3, 0.5)

C. (0.5, 1)

D. (1, 2)

8. $f(x) = \sin(\omega x + \phi)$ ($\omega > 0$, $-\pi < \phi < \pi$), 在 $[-\pi/12, \pi/12]$ 上单调递增, 且 $x = \pi/12$ 为它的一条对称轴, $(\pi/3, 0)$ 是它的一个对称中心; 当 $x \in [0, \pi/2]$ 时, $f(x)$ 的最小值为 ()

A. $-\sqrt{3}/2$

B. $-1/2$

C. 1

D. 0

9. 双曲线 $x^2/a^2 - y^2/b^2 = 1$ ($a > 0, b > 0$) 的左、右焦点分别为 F_1, F_2 , 以右焦点 F_2 为焦点的抛物线 $y^2 = 2px$ ($p > 0$) 与双曲线在第一象限的交点为 P , 若 $|PF_1| + |PF_2| = 3|F_1F_2|$, 则双曲线的离心率 $e =$ ()

A. 2

B. 5

C. $(\sqrt{2}+1)/2$

D. $(\sqrt{5}+1)/2$

二、填空题：本大题共 6 小题，每小题 5 分，共 30 分。

10. 已知 i 是虚数单位, 则 $|(3+i)/i| =$ _____。

11. 在 $(x-1)^6$ 的展开式中, x^3 项的系数为 _____。

12. $l_1: x - y + 6 = 0$ 与 x 轴交于点 A , 与 y 轴交于点 B , 与圆 $(x+1)^2 + (y-3)^2 = r^2$ 交于 C, D 两点, $|AB| = 3|CD|$, 则 $r =$ _____。

13. 小桐操场跑圈, 一周 2 次, 一次 5 圈或 6 圈。第一次跑 5 圈或 6 圈的概率均为 0.5; 若第一次跑 5 圈, 则第二次跑 5 圈的概率为 0.4, 跑 6 圈的概率为 0.6; 若第一次跑 6 圈, 则第二次跑 5 圈的概率为 0.6, 跑 4 圈的概率为 0.4。小桐一周跑 11 圈的概率为 _____; 若一周至少跑 11 圈为运动量达标, 则连续跑 4 周, 记合格周数为 X , 则期望 $E(X) =$ _____。

14. $\triangle ABC$ 中, D 为 AB 边中点, 向量 $CE = (1/3)$ 向量 CD , 向量 $AB = a$, 向量 $AC = b$, 则向量 $AE =$ _____; 若 $|\text{向量 } AE| = 5$ 且 $AE \perp CB$, 则向量 $AE \cdot \text{向量 } CD =$ _____。

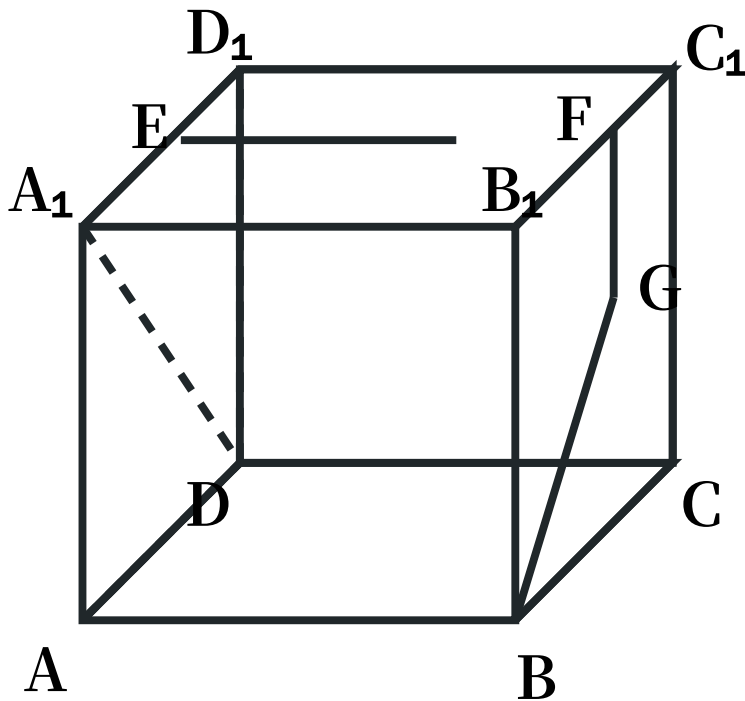
15. 若 $a, b \in \mathbb{R}$, 对 $\forall x \in [-2, 2]$, 均有 $(2a+b)x^2 + bx - a - 1 \leq 0$ 恒成立, 则 $2a+b$ 的最小值为 _____。

三、解答题：本大题共 5 小题，共 75 分。解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤。

16. (本题满分 14 分) 在 $\triangle ABC$ 中，角 A, B, C 的对边分别为 a, b, c 。已知 $a \sin B = \sqrt{3} b \cos A$ ， $c - 2b = 1$ ， $a = \sqrt{7}$ 。

- (I) 求 A 的值；
- (II) 求 c 的值；
- (III) 求 $\sin(A+2B)$ 的值。

17. (本题满分 15 分) 正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 的棱长为 4， E, F 分别为 A_1D_1 ， C_1B_1 中点， $CG = 3C_1G$ 。



- (I) 求证： $GF \perp$ 平面 EBF ；
- (II) 求平面 EBF 与平面 EBG 夹角的余弦值；
- (III) 求三棱锥 $D-BEF$ 的体积。

18. (本题满分 15 分) 已知椭圆 $x^2/a^2 + y^2/b^2 = 1(a > b > 0)$ 的左焦点为 F ，右顶点为 A ， P 为 $x=a$ 上一点，且直线 PF 的斜率为 $1/3$ ， $\triangle PFA$ 的面积为 $3/2$ ，离心率为 $1/2$ 。

- (I) 求椭圆的方程；
- (II) 过点 P 的直线与椭圆有唯一交点 B (异于点 A)，求证： PF 平分 $\angle AFB$ 。

19. (本题满分 15 分) $\{a_n\}$ 是等差数列, $\{b_n\}$ 是等比数列, $a_1=b_1=2$, $a_2=b_2+1$, $a_3=b_3$ 。

(I) 求 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ 的通项公式;

(II) $\forall n \in \mathbb{N}^*$, 有 $T_n = \{p_1 a_1 b_1 + p_2 a_2 b_2 + \dots + p_n a_n b_n \mid p_1, p_2, \dots, p_n \in \mathbb{I}\}$, $\mathbb{I} = \{0, 1\}$ 。

(i) 求证: $\forall t \in T_n$, 均有 $t < a_{n+1} b_{n+1}$;

(ii) 求 T_n 所有元素之和。

20. (本题满分 16 分) 已知函数 $f(x) = ax - (\ln x)^2$ 。

(I) $a=1$ 时, 求 $f(x)$ 在点 $(1, f(1))$ 处的切线方程;

(II) $f(x)$ 有 3 个零点 x_1, x_2, x_3 , 且 $x_1 < x_2 < x_3$ 。

(i) 求 a 的取值范围;

(ii) 证明: $(\ln x_2 - \ln x_1) \cdot \ln x_3 < 4e/(e-1)$ 。