

## 数学试卷 第 1 页

手工讲义版 · A4 打印样板

**注意事项：**答卷前先核对姓名、考生号、试室号、座位号。选择题用 2B 铅笔填涂；非选择题用黑色字迹的钢笔或签字笔作答。答案应写在答题卡指定区域内。

**一、选择题** 每小题 5 分，共 40 分1  $(1 + 5i)i$  的虚部为 ( )

A. -1

B. 0

C. 1

D. 6

2 设全集  $U = \{x \mid x \text{ 是小于 9 的正整数}\}$ ，集合  $A = \{1, 3, 5\}$ ，则  $\complement_U A$  中元素个数为 ( )

A. 0

B. 3

C. 5

D. 8

3 若双曲线  $C$  的虚轴长为实轴长的  $\sqrt{7}$  倍，则  $C$  的离心率为 ( )A.  $\sqrt{2}$ 

B. 2

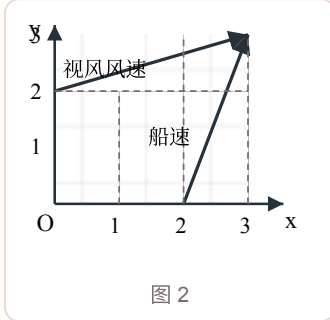
C.  $\sqrt{7}$ D.  $2\sqrt{2}$ 4 若点  $(a, 0)(a > 0)$  是函数  $y = 2\tan(x - \pi/3)$  的图象的一个对称中心，则  $a$  的最小值为 ( )A.  $\pi/6$ B.  $\pi/3$ C.  $\pi/2$ D.  $4\pi/3$ 5 设  $f(x)$  是定义在  $\mathbb{R}$  上且周期为 2 的偶函数，当  $2 \leq x \leq 3$  时， $f(x) = 5 - 2x$ ，则  $f(-3/4) = ( )$ A.  $-1/2$ B.  $-1/4$ C.  $1/4$ D.  $1/2$ 

6 帆船比赛中，运动员可借助风力计测定风速的大小和方向，测出的结果在航海学中称为视风风速。视风风速对应的向量，是真风风速对应的向量与船行风速对应的向量之和，其中船行风速对应的向量与船速对应的向量大小相等、方向相反。

## 数学试卷 第 2 页

手工讲义版 · A4 打印样板

- 6 某时刻测得的视风风速对应的向量与船速对应的向量如图 2 (风速的大小和向量的大小相同), 单位为 m/s, 则真风为 ( )



等级	风速大小 m/s	名称
2	1.1~3.3	轻风
3	3.4~5.4	微风
4	5.5~7.9	和风
5	8.0~10.1	劲风

A. 轻风

B. 微风

C. 和风

D. 劲风

- 7 若圆  $x^2 + (y + 2)^2 = r^2$  ( $r > 0$ ) 上到直线  $y = \sqrt{3}x + 2$  的距离为 1 的点有且仅有 2 个, 则  $r$  的取值范围是 ( )

A. (0, 1)

B. (1, 3)

C. (3, +∞)

D. (0, +∞)

- 8 若实数  $x, y, z$  满足  $2 + \log_2 x = 3 + \log_3 y = 5 + \log_5 z$ , 则  $x, y, z$  的大小关系不可能是 ( )

A.  $x > y > z$ B.  $x > z > y$ C.  $y > x > z$ D.  $y > z > x$ 

## 二、多选题 每小题 6 分, 共 18 分

- 9 在正三棱柱  $ABC - A_1B_1C_1$  中,  $D$  为  $BC$  中点, 则 ( )

A.  $AD \perp A_1C$ B.  $BC \perp$  平面  $AA_1D$ C.  $CC_1 \parallel$  平面  $AA_1D$ D.  $AD \parallel A_1B_1$ 

- 10 设抛物线  $C: y^2 = 6x$  的焦点为  $F$ , 过  $F$  的直线交  $C$  于  $A, B$ , 过  $F$  且垂直于  $AB$  的直线交准线  $l: x = -3/2$  于  $E$ , 过点  $A$  作准线  $l$  的垂线, 垂足为  $D$ , 则 ( )

A.  $|AD| = |AF|$ B.  $|AE| = |AB|$ C.  $|AB| \geq 6$ D.  $|AE| \cdot |BE| \geq 18$

## 数学试卷 第 3 页

手工讲义版 · 正式可打印

11 已知  $\triangle ABC$  的面积为  $1/4$ ，若  $\cos^2 A + \cos^2 B + 2\sin C = 2$ ， $\cos A \cos B \sin C = 1/4$ ，则 ( )

A.  $\sin C = \sin^2 A + \sin^2 B$

B.  $AB = \sqrt{2}$

C.  $\sin A + \sin B = \sqrt{6}/2$

D.  $AC^2 + BC^2 = 3$

### 三、填空题 每小题 5 分，共 15 分

12 若直线  $y = 2x + 5$  是曲线  $y = e^x + x + a$  的切线，则  $a =$  \_\_\_\_\_

13 若一个等比数列的前 4 项和为 4，前 8 项和为 68，则该等比数列的公比为 \_\_\_\_\_

14 一个箱子里有 5 个相同的球，分别以 1~5 标号。若每次取一颗，有放回地取三次，记至少取出一次的球的个数为  $X$ ，则数学期望  $E(X) =$  \_\_\_\_\_

### 四、解答题 共 77 分

15 为研究某疾病与超声波检查结果的关系，从做过超声波检查的人群中随机调查了 1000 人，得到如下列联表。

组别	正常	不正常	合计
患该疾病	20	180	200
未患该疾病	780	20	800
合计	800	200	1000

(1) 记超声波检查结果不正常者患该疾病的概率为  $P$ ，求  $P$  的估计值；

(2) 根据小概率值  $\alpha = 0.001$  的独立性检验，分析超声波检查结果是否与患该疾病有关。

## 数学试卷 第 4 页

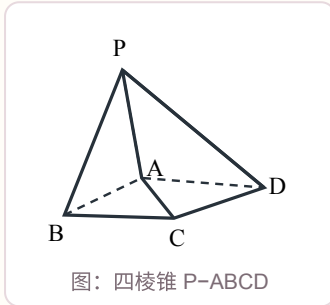
手工讲义版 · 正式可打印

15 附:  $\chi^2 = n(ad - bc)^2 / [(a+b)(c+d)(a+c)(b+d)]$ 。临界值: 3.841, 6.635, 10.828。

16 设数列  $\{a_n\}$  满足  $a_1 = 3$ ,  $a_{n+1}/n = a_n/(n+1) + 1/[n(n+1)]$ 。

- (1) 证明:  $\{na_n\}$  为等差数列;
- (2) 设  $f(x) = a_1x + a_2x^2 + \dots + a_mx^m$ , 求  $f'(-2)$ 。

17 如图所示的四棱锥  $P-ABCD$  中,  $PA \perp$  平面  $ABCD$ ,  $BC \parallel AD$ ,  $AB \perp AD$ 。



- (1) 证明: 平面  $PAB \perp$  平面  $PAD$ ;
- (2) 若  $PA = AB = \sqrt{2}$ ,  $AD = 1 + \sqrt{3}$ ,  $BC = 2$ , 且  $P, B, C, D$  在同一个球面上, 设球心为  $O$ 。
  - (i) 证明:  $O$  在平面  $ABCD$  上;
  - (ii) 求直线  $AC$  与直线  $PO$  所成角的余弦值。

18 设椭圆  $C: x^2/a^2 + y^2/b^2 = 1 (a > b > 0)$  的离心率为  $2\sqrt{2}/3$ , 下顶点为  $A$ , 右顶点为  $B$ ,  $|AB| = \sqrt{10}$ 。

- (1) 求椭圆的标准方程;
- (2) 已知动点  $P$  不在  $y$  轴上, 点  $R$  在射线  $AP$  上, 且满足  $|AR| \cdot |AP| = 3$ 。
  - (i) 设  $P(m, n)$ , 求点  $R$  的坐标;
  - (ii) 设  $O$  为坐标原点,  $M$  是椭圆上的动点, 直线  $OR$  的斜率为直线  $OP$  的斜率的 3 倍, 求  $|PM|$  的最大值。

19 (1) 设函数  $f(x) = 5\cos x - \cos 5x$ , 求  $f(x)$  在  $[0, \pi/4]$  的最大值;

(2) 给定  $\theta \in (0, \pi)$ , 设  $a$  为实数, 证明存在  $y \in [a - \theta, a + \theta]$ , 使得  $\cos y \leq \cos \theta$ 。

## 数学试卷 第 5 页

手工讲义版 · 正式可打印

19

(3) 若存在  $\varphi$  使得对任意  $x$ , 都有  $5\cos x - \cos(5x+\varphi) \leq b$ , 求  $b$  的最小值。

**留白页说明:** 原卷第 5 页主要承接第 19 题第 (3) 问, 并留出作答空间。手工重排正式版可根据孩子使用习惯保留作答空白, 或合并到第 4 页后方。