

2025 年普通高等学校招生全国统一考试（北京卷）

数学

本试卷共 12 页，150 分。考试时长 120 分钟。考生务必将答案答在答题卡上，在试卷上作答无效。考试结束后，将本试卷和答题卡一并交回。

第一部分（选择题 共 40 分）

一、选择题共 10 小题，每小题 4 分，共 40 分。在每小题列出的四个选项中，选出符合题目要求的一项。

1. 已知集合 $M = \{x \mid 2x - 1 > 5\}$, $N = \{1, 2, 3\}$, 则 $M \cap N =$ ()

- A. $\{1, 2, 3\}$ B. $\{2, 3\}$ C. $\{3\}$ D. \emptyset

2. 已知复数 z 满足 $i \cdot z + 2 = 2i$, 则 $|z| =$ ()

- A. $\sqrt{2}$ B. $2\sqrt{2}$ C. 4 D. 8

3. 双曲线 $x^2 - 4y^2 = 4$ 的离心率为 ()

- A. $3/2$ B. $\sqrt{5}/2$ C. $5/4$ D. $\sqrt{5}$

4. 为了得到函数 $y = 9^x$ 的图象，只需把函数 $y = 3^x$ 的图象上所有点的 ()

- A. 横坐标变为原来 $1/2$ 倍（纵坐标不变） B. 横坐标变为原来的 2 倍（纵坐标不变）
C. 纵坐标变为原来的 $1/3$ 倍（横坐标不变） D. 纵坐标变为原来的 3 倍（横坐标不变）

5. 已知 $\{a_n\}$ 是公差为零的等差数列， $a_1 = -2$ ，若 a_3, a_4, a_6 成等比数列，则 $a_{10} =$ ()

- A. -20 B. -18 C. 16 D. 18

6. 已知 $a > 0, b > 0$, 则 ()

- A. $a^2 + b^2 > 2ab$ B. $1/a + 1/b \geq 1/(ab)$
C. $a + b > \sqrt{ab}$ D. $1/a + 1/b \leq 2/\sqrt{ab}$

7. 已知函数 $f(x)$ 的定义域为 D , 则“ $f(x)$ 的值域为 \mathbb{R} ”是“对任意 $M \in \mathbb{R}$, 存在 $x_0 \in D$, 使得 $f(x_0) > M$ ”的 ()

- A. 充分不必要条件 B. 必要不充分条件
C. 充要条件 D. 既不充分也不必要条件

8. 设函数 $f(x) = \sin \omega x + \cos \omega x$ ($\omega > 0$), 若 $f(x + \pi) = f(x)$ 恒成立, 且 $f(x)$ 在 $[0, \pi/4]$ 上存在零点, 则 ω 的最小值为 ()

- A. 8 B. 6 C. 4 D. 3

9. 一定条件下, 某人工智能大语言模型训练 N 个单位数据量所需要的时间 $T = k \log_2 N$ (单位: h), 其中 k 为常数。已知训练数据量 N 从 10^6 个单位增加到 1.024×10^9 个单位时, 训练时间增加 20h; 当训练数据量 N 从 1.024×10^9 个单位增加到 4.096×10^9 个单位时, 训练时间增加 ()

A. 2h

B. 4h

C. 20h

D. 40h

10. 在平面直角坐标系 xOy 中, $|OA|=|OB|=\sqrt{2}$, $|AB|=2$ 。设 $C(3,4)$, 则 $|2CA+AB|$ 的取值范围是 ()

A. $[6,14]$

B. $[6,12]$

C. $[8,14]$

D. $[8,12]$

第二部分 (非选择题 共 110 分)

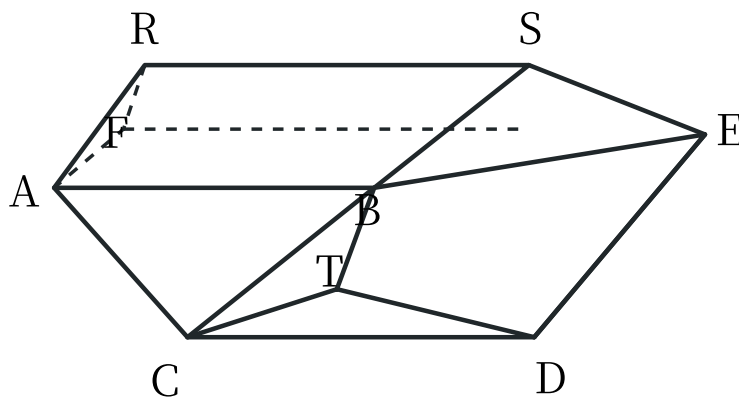
二、填空题共 5 小题, 每小题 5 分, 共 25 分。

11. 已知抛物线 $y^2 = 2px$ ($p > 0$) 的顶点到焦点的距离为 3, 则 $p =$ _____。

12. 已知 $(1 - 2x)^4 = a_0 - 2a_1x + 4a_2x^2 - 8a_3x^3 + 16a_4x^4$, 则 $a_0 =$ _____; $a_1 + a_2 + a_3 + a_4 =$ _____。

13. 已知 $\alpha, \beta \in [0, 2\pi]$, 且 $\sin(\alpha + \beta) = \sin(\alpha - \beta)$, $\cos(\alpha + \beta) \neq \cos(\alpha - \beta)$ 。写出满足条件的一组 α, β 的值: $\alpha =$ _____, $\beta =$ _____。

14. 某科技兴趣小组用 3D 打印机制作的一个零件可以抽象为如图所示的多面体, 其中 $ABCDEF$ 是一个平面多边形, 平面 $AFR \perp$ 平面 ABC , 平面 $CDT \perp$ 平面 ABC , $AB \perp BC$, $AB \parallel EF \parallel RS \parallel CD$, $BC \parallel DE \parallel ST \parallel AF$ 。若 $AB = BC = 8$, $AF = CD = 4$, $RA = RF = TC = TD = 5/2$, 则该多面体的体积为 _____。



15. 关于定义域为 \mathbb{R} 的函数 $f(x)$, 给出下列四个结论:

- ①存在在 \mathbb{R} 上单调递增的函数 $f(x)$ 使得 $f(x)+f(2x)=-x$ 恒成立;
- ②存在在 \mathbb{R} 上单调递减的函数 $f(x)$ 使得 $f(x)-f(2x)=x$ 恒成立;
- ③使得 $f(x)+f(-x)=\cos x$ 恒成立的函数 $f(x)$ 存在且有无穷多个;
- ④使得 $f(x)-f(-x)=\cos x$ 恒成立的函数 $f(x)$ 存在且有无穷多个。

其中正确结论序号是 _____。

三、解答题共 6 小题, 共 85 分。解答应写出文字说明、演算步骤或证明过程。

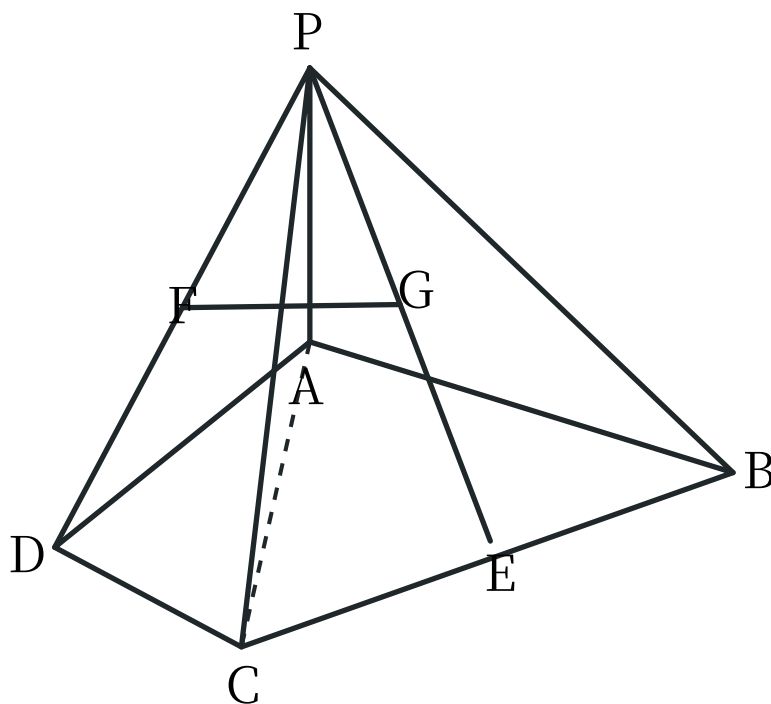
16. 在 $\triangle ABC$ 中, $\cos A = -1/3$, $a \sin C = 4\sqrt{2}$ 。

(1) 求 c 的值;

(2) 再从条件①、条件②、条件③这三个条件中选择一个作为已知, 使得 $\triangle ABC$ 存在, 求 BC 边上的高。

条件①: $a = 6$; 条件②: $a \sin B = 10\sqrt{2}/3$; 条件③: $\triangle ABC$ 的面积为 $10\sqrt{2}$ 。

17. 如图, 在四棱锥 $P-ABCD$ 中, $\triangle ADC$ 与 $\triangle BAC$ 均为等腰直角三角形, $\angle ADC = 90^\circ$, $\angle BAC = 90^\circ$, E 为 BC 的中点。



(1) 若 F, G 分别为 PD, PE 的中点, 求证: $FG \parallel$ 平面 PAB ;

(2) 若 $PA \perp$ 平面 $ABCD$, $PA = AC$, 求直线 AB 与平面 PCD 所成角的正弦值。

18. 某次考试中, 只有一道单项选择题考查了某个知识点, 甲、乙两校的高一年级学生都参加了这次考试。随机抽查甲、乙两校高一年级各 100 名学生该题的答题数据, 其中甲校学生选择正确的人数为 80, 乙校学生选择正确的人数为 75。假设学生之间答题相互独立, 用频率估计概率。

(1) 估计甲校高一年级学生该题选择正确的概率 p ;

(2) 从甲、乙两校高一年级学生中各随机抽取 1 名, 设 X 为这 2 名学生中该题选择正确的人数, 估计 $X = 1$ 的概率及 X 的数学期望;

(3) 假设: 如果没有掌握该知识点, 学生就从题目给出的四个选项中随机选择一个作为答案; 如果掌握该知识点, 甲校学生选择正确的概率为 100%, 乙校学生选择正确的概率为 85%。设甲、乙两校高一年级学生掌握该知识点的概率估计值分别为 p_1, p_2 , 判断 p_1 与 p_2 的大小 (结论不要求证明)。

19. 已知椭圆 $E: x^2/a^2 + y^2/b^2 = 1$ ($a > b > 0$) 的离心率为 $\sqrt{2}/2$, 椭圆 E 上的点到两焦点的距离之和为 4。

(1) 求椭圆 E 的方程;

(2) 设 O 为坐标原点, 点 $M(x_0, y_0)(x_0 \neq 0)$ 在椭圆 E 上, 直线 $x_0x + 2y_0y - 4 = 0$ 与直线 $y = 2, y = -2$ 分别交于点 A, B . 设 $\triangle OAM$ 与 $\triangle OBM$ 的面积分别为 S_1, S_2 , 比较 S_1/S_2 与 $|OA|/|OB|$ 的大小。

20. 已知函数 $f(x)$ 的定义域是 $(-1, +\infty)$, $f(0)=0$, 导函数 $f'(x)=\ln(1+x)/(1+x)$. 设 l_1 是曲线 $y=f(x)$ 在点 $A(a, f(a))(a \neq 0)$ 处的切线。

- (1) 求 $f(x)$ 的最大值;
- (2) 当 $-1 < a < 0$ 时, 证明: 除切点 A 外, 曲线 $y=f(x)$ 在直线 l_1 的上方;
- (3) 设过点 A 的直线 l_2 与直线 l_1 垂直, l_1, l_2 与 x 轴交点的横坐标分别是 x_1, x_2 , 若 $a > 0$, 求 $(2a - x_2 - x_1)/(x_2 - x_1)$ 的取值范围。

21. 已知集合 $A=\{1,2,3,4,5,6,7,8\}$, $M=\{(x,y)|x \in A, y \in A\}$, 从 M 中选取 n 个不同的元素组成一个序列: $(x_1, y_1), (x_2, y_2), \dots, (x_n, y_n)$. 若该序列的相邻项 $(x_i, y_i), (x_{i+1}, y_{i+1})$ 满足: $|x_{i+1}-x_i|=3, |y_{i+1}-y_i|=4$ 或 $|x_{i+1}-x_i|=4, |y_{i+1}-y_i|=3$, 则称该序列为 K 列。

- (1) 对于第 1 项为 $(3,3)$ 的 K 列, 写出它的第 2 项;
- (2) 设 Γ 为 K 列, 且 Γ 中的项 (x_i, y_i) 满足: 当 i 为奇数时, $x_i \in \{1,2,7,8\}$; 当 i 为偶数时, $x_i \in \{3,4,5,6\}$. 判断 $(3,2), (4,4)$ 能否同时为 Γ 中的项, 并说明理由;
- (3) 证明: 由 M 的全部元素组成的序列都不是 K 列。